数理解析研究所講究録
599巻 1986年 95-107

$L_p(1, \chi)$ の 下からの評価について

森田康夫（東北大学 理学部）
(Yasuo Morita)

p を素数とし，χ を Dirichlet character，$L_p(s,\chi)$ を p 進L関数とする．このとき $L_p(1,\chi)$ を下から評価することを考える．$L_p(1,\chi)$ が 0 でないことは，円分体における Leopoldt 予想と同値であり，Brumer により p 進体上の超越数の理論を使って証明されている．他方では，$L_p(1,\chi)$ の値を 円単数を使って explicit に表現することが，Leopoldt により成されている．そこで ここでは $L_p(1,\chi)$ の Leopoldt による表現に対して，Baker，Brumer，Kaufman らの方法を使うことにより，$L_p(1,\chi)$ の値を 下から具体的に評価することを目標とする．

§1. $L_p(1,\chi)$ の explicit formula

p を 素数とし，Q_p を p 進体，C_p を Q_p の代数的閉包の完備化とする．有理数体 Q の代数的閉包の 複素数体 C と p 進体 C_p への埋め込みを固定し，代数的数を C の元とも C_p の元とも思う．

f を整数とし，χ を modulo f で定義された 原始 Dirichlet 指標，$L(s,\chi)$ を χ に対する Dirichlet の L 関数とする．この時 $L(s,\chi)$ の非負整数での値は 代数的数となり，それを intepolate することにより p 進L関数 $L_p(s,\chi)$ が構成できる．さらに，このようにして構成された p

進 L 関数の $s = 1$ での値 $L_p(1, \chi)$ も Dirichlet の L 関数の $s = 1$ での値 $L(1, \chi)$ と同様の表示を持つことが Leopoldt により示されている．以下このことを詳しく説明する．

$\chi(-1) = -1$ なら $L_p(s, \chi)$ は 恒等的に 0 となるから，$\chi(-1) = 1$ と仮定する．ζ を $\exp(2\pi i/f)$（に対する C または C_p の元）とし，

$$\tau(\chi) = \Sigma \quad \chi(a)\,\zeta^a \qquad (0 < a < f)$$

を χ に対する Gauss の和とする．C_p の中での収束べき級数

$$\log_p(z) = \Sigma \quad (-1)^{n-1} z^n / n \qquad (0 < n < \infty)$$

を p 進対数関数と呼ぶ．この関数は 単位単数群 $\{ z ; |z-1|_p < 1 \}$ 上で定義されているが，これを $\log_p(p) = 0$ と置き，関数等式

$$\log_p(z^n) = n \log_p(z)$$

を使って，C_p の乗法群 $\{ z ; z \neq 0 \}$ 上に 拡張しておく．従って，η が 1 のべき根なら $\log_p \eta = 0$ となる． この時，p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ の $s = 1$ での値 $L_p(1, \chi)$ は 次のようにして与えられる ：

$$L_p(1, \chi) = -(1-\chi(p)p^{-1})\,\tau(\chi)\,f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi^{-1}(a) \log_p \{\zeta^{(a-1)/2}(1-\zeta^{-a})/(1-\zeta^{-1})\}$$

ここで，上式に出てきた数 $E(a) = \zeta^{(a-1)/2}(1-\zeta^{-a})/(1-\zeta^{-1})$ は，円単数と呼ばれる円分体 $Q(\zeta)$ の 実の単数で，$1 < a < f/2$, $(a, f) = 1$ なる条件の下で動かす時，乗法的に独立となる．なお Dirichlet の L 関数の $s = 1$ での値 $L(1, \chi)$に対しても，上式の右辺の第一因子を除いた形での 類似の等式が成り立つことが知られている．

§2. 代数的数の対数の linear form の下からの評価, I

m を自然数とし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ を代数的数とする. このとき, Gel'fond, Baker, Fel'dman らは, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ が乗法的に独立で, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ の少なくても一つが 0 でないなら, $\log \alpha_i$ らについての linear form

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots\cdots + \beta_m \log \alpha_m$$

は 0 とはならないことを示した. さらに彼らは, この linear form が どの程度小さくなり得るかについて, この linear form の下からの評価を得ている.

これに対し, Gel'fond, Sprindzhuk, Kaufman らは これらの結果の <u>p 進体上での類似</u>を考え, 次のような結果を得ている.

<u>定理</u>. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ を乗法的に独立な代数的数とし, その height は h を越さぬものとする. また $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ は すべては 0 でない代数的数で, その height は H 以下 ($H > 1$) であるとする. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_0, \ldots, \beta_m$ が 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上生成する体を K とし, K の $\mathbb{Q}$ 上での次数を n とする. K の p 進体 C_p への埋め込みを固定し, これにより α_i や β_j を p 進体 C_p の元と思う. さらに この時 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ は単位単数となり, $\log_p \alpha_1, \ldots\ldots, \log_p \alpha_m$ が 定義されるものとする. この時 n, h, m, p のみによる<u>計算可能な定数</u> c があり,

$$|\beta_0 + \beta_1 \log_p \alpha_1 + \cdots + \beta_m \log_p \alpha_m|_p > |p|_p^{c \log H}$$

なる形の評価が成りたつ.

（注） これは Kaufman による定理だが，彼は $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ が p 進単位単数であるとしか仮定していないが，彼の証明をみると，

$$|\alpha_i - 1|_p < |p^{1/(p-1)}|_p$$

であると仮定することが必要であると思う．

（注） 定理の中で，p 進体での式の評価に 複素数体の中で定義された height が出てくるのは，p 進体での下からの評価を，積公式（ product formula ）を使う事により，複素数体での上からの評価に帰着するからである．

§3．代数的数の対数の linear form の下からの評価，II

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_0, \ldots, \beta_m$ らを §2 の定理の通りとし，linear form

$$L(\alpha, \beta) = \beta_0 + \beta_1 \log_p \alpha_1 + \ldots + \beta_m \log_p \alpha_m$$

を，C_p の中で 下から評価することを考える．

簡単のため，$\beta_0 = 0$ とし，我々は Kaufman の方法を多少簡易化したものを使う．もちろん主な仕事は，彼が 単に ”c は計算可能な定数である” としか言っていないのを，具体的に はっきり分かる形に 計算してみせることである．

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ が $|\alpha_i - 1|_p < |p^{1/(p-1)}|_p$ を満たすものとし，

$$\exp_p(z) = \Sigma\ z^m / m! \qquad (\ C_p \text{ の中での収束べき級数 })$$

$$\alpha_i^z = \exp_p\{\log_p(\alpha_i) z\} \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

とおく．$\exp(z)$ は $|z|_p < |p^{1/(p-1)}|_p$ なる範囲で収束し，α_i は前頁の条件を満たすから

$$|\log_p(\alpha_i)|_p = |\alpha_i - 1|_p < |p^{1/(p-1)}|_p$$

を満たし，従って関数 α_i^{z} は $|z|_p \leqq 1$ なる範囲で定義される．特に この関数は z が 整数 のときに 定義される．

$\beta_m = 0$ の時は m の代わりに $m-1$ を取れば良いから，β_m は 0 でないものとし，$L(\alpha,\beta)$ を $-\beta_m$ で割り，$\beta_i/-\beta_m$ を改めて β_i と置く．この時

$$L(\alpha,\beta) = \beta_1 \log_p \alpha_1 + \ldots + \beta_{m-1} \log_p \alpha_{m-1} - \log_p \alpha_m$$

となる． 従って $L(\alpha,\beta)$ が小さければ

$$\log_p \alpha_m \sim \beta_1 \log_p \alpha_1 + \ldots + \beta_{m-1} \log_p \alpha_{m-1}$$

と近似できる．

そこで次のような関数を考える．

$$F(z_1,\ldots,z_{m-1}) = \sum c(l_1,\ldots,l_m)\ \alpha_1^{(l_1+\beta_1 l_m)z_1} \cdots \alpha_{m-1}^{(l_{m-1}+\beta_{m-1} l_m)z_{m-1}} \qquad (1 \leqq l_i \leqq L)$$

ここで $c(l_1,\ldots,l_m)$ と L は整数であるものとし，後で適当に定めるものとする．さて 関 数 $F(z_1,\ldots,z_{m-1})$ を $z_1,\ldots,z_{m-1}$ で $\sigma_1,\ldots,\sigma_{m-1}$ 回微分し，$z_1 = \ldots = z_{m-1} = z$ と置き，更に 共通の因子である

$$(\log_p \alpha_1)^{\sigma_1} \cdots (\log_p \alpha_{m-1})^{\sigma_{m-1}}$$

で割ると，

$$f(z) = f_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z)$$
$$= \Sigma \; c(l_1,\ldots,l_m)(l_1+\beta_1 l_m)^{\sigma_1} \cdots (l_{m-1}+\beta_{m-1} l_m)^{\sigma_{m-1}}$$
$$\times \alpha_1^{(l_1+\beta_1 l_m)z} \cdots \alpha_{m-1}^{(l_{m-1}+\beta_{m-1} l_m)z}$$

となる．そこで $L(\alpha,\beta)$ が十分小さいとすると，（関数として） $f(z)$ と

$$\Phi(z) = \Phi_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z)$$
$$= \Sigma \; c(l_1,\ldots,l_m)(l_1+\beta_1 l_m)^{\sigma_1} \cdots (l_{m-1}+\beta_{m-1} l_m)^{\sigma_{m-1}}$$
$$\times \alpha_1^{l_1 z} \cdots \alpha_{m-1}^{l_{m-1} z} \alpha_m^{l_m z}$$

は 近くなる．特に， z に整数値を代入した時 $f(z)$ と $\Phi(z)$とは近くなる．この二つはよく似ているが，$\Phi(z)$ の方が α_m^z なる関数を含むのに対し，$f(z)$の方は 含まない点が，本質的に異なる． なお，$\Phi(z)$ の分母は $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ の分母より 簡単に計算できる事に注意しておく．

L と整数 S ,T を十分大きく取り，Dirichlet の部屋割り論法（Siegel の補題）を使って，

$$0 \leqq \sigma_1 + \ldots + \sigma_{m-1} \leqq S-1,\; 0 \leqq z \leqq T-1$$

に対して，整数の組 $c(l_1,\ldots,l_m)$ $(0 \leqq l_i \leqq L)$ を

(a) $c(l_1, \ldots, l_m)$ は 複素数体 C の中では 余り大きくなく，かつ

(b) $\Phi_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z)$ は p 進体 C_p の中で十分小さい

ように取る．この時 $\Phi_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z)$ は 代数的数だから，その絶対値と

分母に比べて，C_p の中での大きさが十分小さければ 0 となる．したがって

上の仮定のもとでは

(b') $\Phi_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z) = 0$

となる．ところが，前に注意した様に，$L(\alpha, \beta)$ が 十分小さいという仮定の

もとでは，関数として $f(z)$ と $\Phi(z)$ は 近いから，その値も近く，結局

(b'') $f_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z)$ は C_p の中で十分小さい

ことが解る．

さて前に注意したように，$\Phi_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z)$ に比べて $f_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z)$ は関数 α_m^z を含まぬ．従って，$\Phi_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z)$ を微分したものは この形の関数の一次結合には書けぬのに対し，$f_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z)$ の方は，

<u>この関数を微分したものも 同じ形の関数の一次結合となる</u>．このため 仮定

(b'') のもとでは，S を少し小さくすることにより，T を大きくしても

$$0 \leqq \sigma_1 + \ldots + \sigma_{m-1} \leqq S - 1, \quad 0 \leqq z \leqq T - 1$$

なる範囲において，

(b'') $f_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z)$ は C_p の中で十分小さい

が成り立つ．このため $f(z)$ と $\Phi(z)$ が 近いことを 再び使うと

(b') $\Phi_{\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}}(z) = 0$

が 同じ範囲で成り立つ．この事は，$\Phi(z)$ が 本来持ち得るより沢山の零点を持つことを意味し，矛盾となる．従って，$L(\alpha,\beta)$ が十分小さいと言う仮定は矛盾を導く．

大体以上のような議論をする事により，次のような事が証明できる．

定理．$\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_{m-1}$ は代数的数とし，α_i らは乗法的に独立であるものとする．α_i,β_j らが 有理数体 Q 上で生成する体を K とする．K の複素数体 C と p 進体 Q_p の代数的閉包の完備化 C_p への埋め込みを固定しておく．K の Q 上の拡大次数を n とし，p の K への C_p に対する延長の相対次数と分岐指数を それぞれ κ と μ で表す．また $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ は

$$|\alpha_i - 1|_p < |p^{1/(p-1)}|_p$$

を満たすものと仮定する．$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ の分母の最小公倍数を d_α とし $\beta_1,\ldots,\beta_{m-1}$ の分母の最小公倍数を d_β で表す．また，3 以上の実数 h_α と実数 h_β は，複素数体において 不等式

$$\operatorname*{Max}_{i,\tau} |\alpha_i^\tau| \leqq h_\alpha, \quad \operatorname*{Max}_{j,\tau} |\beta_j^\tau| \leqq h_\beta$$

を満たすものとする．ここで i は 1 から m まで，j は 1 から m-1 まで動き，τ は すべての K の C の中への埋め込を動くものとする．このとき，定数

$$\lambda = \mathrm{Max}\{(d_\beta h_\beta)^{1/2}, (2\kappa\mu)^m, (9\,2^{6m^2-3m+1} m\,n\,p \log h_\alpha / \log p)^{3m/2}\}$$

に対して，評価

$$|\beta_1 \log_p \alpha_1 + \ldots + \beta_{m-1} \log_p \alpha_{m-1} - \log_p \alpha|_p \geqq |p^{\lambda^{(2m+3)}}|_p$$

が成り立つ.

§4. 円単数の評価と結果

§3 で得た結果を 我々の場合に使うため，円単数の評価が必要となる．そこで χ を 原始 Dirichlet 指標とし，f をその導手とする．ζ を $\exp(2\pi i/f)$ とし，$1 < a < f$, $(a,f) = 1$ なる整数 f に対し，

$$E(a) = \zeta^{(a-1)/2}(1-\zeta^{-a})/(1-\zeta^{-1})$$

なる数を考える．この数は 円体 $Q(\zeta)$ の単数となる事が解っている．

τ を 円体 $Q(\zeta)$ の 複素数体 C への 任意の埋め込みとすると，

$$E(a)^{\tau} = \eta^{(a-1)/2}(1-\eta^{-a})/(1-\eta^{-1}) \qquad (\ \eta = \zeta^{\tau}\ )$$

となる．ところが，η は 1 の原始 f 乗根だから 単位円周上にあり，

$$|1-\eta^{-a}| \leqq 2,\ |1-\eta^{-1}| \geqq \sin(\pi/f) \geqq 2/f \quad (f \geqq 2)$$

なる不等式を満たすことが解る．よって問題の $E(a)^{\tau}$ は

$$E(a)^{\tau} \leqq 2\ \{\sin(\pi/f)\}^{-1} \leqq f$$

なる評価を持つ．

さて $E(a)^{\tau}$ の大きさは解ったが，§3 の定理を使うためには，

$$|\ \alpha_i - 1\ |_p < |\ p^{1/(p-1)}|_p$$

なる条件を満たす必要がある．まず Fermat の小定理より，ν で $Q(\zeta)$ における p の相対次数とすると，$Q(\zeta)$ の任意の単数 ε は $(p^{\nu}-1)$ 乗すると，(p に関して) 単位単数となる．

f を素因数分解して，$f = f_0\, p^e$, $(f_0,p) = 1$ と置く．この時，$Q(\zeta)$ に

おける分岐指数は p^e となる．よって，

$$|\varepsilon^{(p^\nu-1)}-1|_p \leqq |p^{1/p^e}|_p$$

を満たすから，$p \neq 2$ なら，

$$|\varepsilon^{(p^\nu-1)p^e}-1|_p \leqq |p|_p < |p^{1/(p-1)}|_p$$

となる．また $p=2$ の時は，e の代わりに $e+1$ を取れば 同様になる．

さて，$E(a)$ $(1\leqq a\leqq f, (a,f)=1)$ は乗法的に独立であるから，それらを $(p^\nu-1)p^e$ 乗した物も 乗法的に独立である．従って，$E(a)$ の $(p^\nu-1)p^e$ 乗に対して定理が使える．そこでこれらを $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ と置く．

$E(a)$ は単数であるから $d_\alpha=1$ である．また以上に述べたことより，

$$h_\alpha = f^{(p^\nu-1)p^e}$$

と置ける．χ が自明な Dirichlet 指標でないとすると，$f \geqq 3$ となる．よって，$h_\alpha > 3$ と成り，h_α についての 定理の仮定も満たされる．他方

$$\beta_j = \chi(j)^{-1}/\chi(m)$$

と置くと，これは 1 のべき根であるから，

$$d_\beta = h_\beta = 1$$

に対して 定理の仮定が満たされる．

良くしられている様に，ガウスの和 $\tau(\chi)$ は代数的整数で $|\tau(\chi)| = f^{1/2}$ を満たす．また $\chi(p)$ は 1 のべき根であるか，0 である．さらに円単数 $E(a)^{\tau}$ が実数であることに注意すると，

$$2m \leqq f,\ 2n \leqq f^2,\ 2\kappa\mu \leqq 2n \leqq f^2,\ 2\nu \leqq f,\ p^e \leqq f$$

なる評価が得られる． これを使うと，p 進 L 関数の s = 1 での値を表す公式の Σ 以下の $\log_p$ の一次式に対しては，§3 の定理における λ は，$p \neq 2$ なら，

$$\lambda \leqq \mathrm{Max}\ \{ f^f,\ 2^{9f^3/8} f^{9f/4} (\log h_\alpha)^{3f/4} (p/\log p)^{3f/4} \}$$

$$\leqq \{ 2^{9f^3} f^{24f} (\log f)^{6f} p^{3f^2+6f} \}^{1/8}$$

として求められる．これより次の定理が得られる．

<u>定理</u>． p を奇素数とし，χ を 自明でない原始 Dirichlet 指標で，$\chi(-1) = 1$ なるものとする． f を χ の導手とする．この時，χ に対する p 進 L 関数 $L_p(s,\chi)$ の s = 1 での値 $L_p(1,\chi)$ について，次の評価が成り立つ．

$$|L_p(1,\chi)|_p \geqq p^{-\{ 2^{9f^3} p^{3f^2+6f} f^{24f} (\log f)^{6f} \}^{(f+3)/8}}$$

これは 大体 $p^{-p^{f^4}}$ の order である．p = 2 でも 大体同様である．

参考文献

1. A. Baker, Transcendental number theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.
2. A. Brumer, On the units of algebraic number fields, Mathematika, 14(1967), 121-124.
3. N. Fel'dman, An improvement of the estimate of a linear form in the logarithms of algebraic numbers, Math. sb., 77(119), 425-436.
4. A. O. Gel'fond, Transcendental & algebraic numbers, Dover Publ.Inc., New York, 1960 (English translation).
5. K. Iwasawa, Lectures on p-adic L-functions, Ann. Math. Studies, 74(1972).
6. Kaufman, An estimate of linear forms in the logarithms of algebraic numbers in the P-adic metric, Vestnik Moskov. Univ., Matem., 26(1971), 57-63 (English translation).
7. T. Kubota,H. W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte, I, J. Reine Angew. Math., 214/215(1964), 328-339.
8. H. W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte,II, J.Reine Angew. Math., 274/275(1975), 224-239.
9. V. G. Sprindzhuk, Estimates of linear forms with p-adic logarithms of algebraic numbers, Izv. Akad. Nauk BSSR, ser. Fiz.-Matem., 4(1968), 5-14. (筆者は,この論文を見ていない.)

（追記）．シムポシウムの時，Waldschmidt 氏より次のような事を聞いた．

（１）．この論文で問題にしているような log を含む linear form の p 進体での評価をA. J. van der Porten が

A. J. van der Porten, Linear forms in Logarithms in the p-adic case . In : Transcendental theory : Advances and applications , edited by A. Baker and D. W. Masser, 29-57, Academic press, London-New York San Franncisco,1977.

において調べている．但し，van der Porten は β が有理数の場合を扱っており，一般の場合は結果のみを書いている．また彼の論文には，本質的ではないが多少の誤りを含んでおり，彼の結果は 多少の修正を必要とするらしい．従って ここで述べたような事をするには 彼の結果を引用してすませるわけにはいかない．

（２）．上に述べた van der Porten の結果や，複素数体上での対応する結果を参考にすると，このような Baker の方法での評価の限界は，大体

$$O(p^{-f^f})$$

位であると思われる．

（３）．V. G. Spindzhuk は 超越数についての教科書（ロシア語）を書いており，その中で log を含む linear form の p 進体上での評価についてふれているらしい（筆者はまだ見ていない）．